Adı Soyadı : CEVAP ANAHTARI **31.05.2019**

Numarası :

MAT104 LİNEER CEBİR II FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ olmak üzere σ, τ için

a) $\sigma^2\tau$ çarpımını hesaplayınız.

b) $\sigma^2\tau$ çarpımını transpozisyonların çarpımı olarak yazınız ve işaretini bulunuz.

SORU 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi için

a) A nın eki (adjointi) $\widetilde{A}$ yı hesaplayınız.

b) A nın ekini kullanarak A^{-1} matrisini bulunuz.

SORU 3:

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 2 \\ 2x-y+z &= 1 \\ -x+y-2z &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözünüz.

SORU 4: Bir $A:V \to V$ lineer dönüşümünde her bir $\alpha \neq 0$ vektörüne $A(\alpha) = \lambda\alpha$ olacak şekilde bir tek λ karakteristik değeri karşılık gelir, ispatlayınız.

SORU 5: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi için $\det A = ad - bc$ olduğunu gösteriniz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar

Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

1- a) $\sigma^2\tau$ permütasyon çarpımını hesaplamak için öncelikle σ^2 permütasyonunu bulalım:

$$\sigma^2 = \sigma . \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$ Buradan,

$$\sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$ bulunur.

b) $$\sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

↓ Ayrık devir

$$= (1\ 2\ 5\ 3\ 6)$$

↓ Transpozisyon

$$= (1\ 6)(1\ 3)(1\ 5)(1\ 2).$$

$\sigma^2\tau$ permütasyonu yukarıda transpozisyonların çarpımı olarak yazıldı. Bu permütasyon 4 tane transpozisyonun çarpımı olarak ifade edildiği için onun işareti

$$s(\sigma^2\tau) = +1$$ dır.

2 - a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin eki $\tilde{A}$ olmak üzere

A_{ij}-ler A nın kofakterini göstermek üzere

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ elde edilir. Buradan,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

b) A matrisinin tersi var ve A^{-1} ile gösterilmek üzere

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \tilde{A}$ şeklindedir. Buradan,

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3$ olmak üzere $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$ bulunur.

3- $n = 3$ (Bilinmeyen Sayısı)

$m = 3$ (Denklem Sayısı) . Ayrıca, sistemin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ olmak üzere

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 6 - 1$$

$$= 6 \neq 0 \text{ dır.}$$

Yukarıdaki verilere göre, $m = n$ ve $\det A \neq 0$ olduğundan bu sistemin çözümü Cramer metoduyla bulunabilir.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{0}{6} = 0, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = -1$$

elde edilir.

4- Kabul edelim ki aynı bir $\vec{\alpha} \neq 0$ karakteristik vektörüne iki farklı λ_1, λ_2 karakteristik degerleri karsılık gelsin. O zaman,

$$A(\vec{\alpha}) = \lambda_1 \vec{\alpha}$$
$$A(\vec{\alpha}) = \lambda_2 \vec{\alpha}$$

yazılır. Buradan,

$$\lambda_1 \vec{\alpha} = A(\vec{\alpha}) = \lambda_2 \vec{\alpha}$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 \vec{\alpha} = \lambda_2 \vec{\alpha}$$
$$\Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{\alpha} = \vec{0}$$

elde edilir. Hipoteze göre $\vec{\alpha} \neq 0$ oldugundan $\lambda_1 = \lambda_2$ olur. Bu ise, her bir $\vec{\alpha} \neq 0$ vektörüne bir tek karakteristik degerin karsılık geldiği anlamındadır.

5- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi için $\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ ve $\vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

vektörlerini belirleyelim. $\mathbb{R}^2$ uzayının standart bazı $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ olmak üzere

$$\vec{\alpha}_1 = a\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 \quad \text{ve} \quad \vec{\alpha}_2 = b\vec{e}_1 + d\vec{e}_2 \quad \text{olacak}$$

sekilde $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılır. Buradan,

$$\det A = \det[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2] = \det[a\hat{e}_1 + c\hat{e}_2, b\hat{e}_1 + d\hat{e}_2]$$ Determinan fonk. n-lineer

$$= ab \underbrace{\det[\hat{e}_1, \hat{e}_1]}_{=0} + ad \det[\hat{e}_1, \hat{e}_2]$$
$$+ cb \det[\hat{e}_2, \hat{e}_1] + cd \underbrace{\det[\hat{e}_2, \hat{e}_2]}_{=0}$$ Determinan fonk. alte ve simetrik

$$= ad - bc \quad \text{bulunur.}$$